

**Современный
Гуманитарный
Университет**

Дистанционное образование

0758.02.01; 1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

**МАТЕМАТИКА.
УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС**

ЮНИТА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

МОСКВА 2001

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов высших
учебных заведений

КУРС: МАТЕМАТИКА. УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС

Юнита 1. Основы математического анализа. Часть II.

Юнита 2. Элементы линейной алгебры.

Юнита 3. Элементы математической статистики.

ЮНИТА 2

Рассматриваются основные действия над матрицами, системы линейных уравнений, вычисление определителей разложением по строке и методом Гаусса.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

ISBN 5-8323-0159-5

0758.006.02.99.01; 1/07.13.Тир.6000

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	6
ГЛАВА 1. Матрицы	6
§1. Основные определения и примеры	6
§2. Действия над матрицами	8
§3. Понятие ранга матрицы	17
§4. Элементарные преобразования над матрицами. Приведение матрицы к ступенчатому виду.	19
ГЛАВА 2. Система линейных уравнений	23
§1. Основные понятия и определения	23
§2. Однородные системы уравнений. Основные свойства. Общее решение системы	26
§3. Неоднородные системы уравнений. Основные свойства решений. Критерий совместности неоднородной системы уравнений	32
§4. Модель Леонтьева межотраслевого баланса	36
ГЛАВА 3. Определители	39
§1. Определители второго и третьего порядка. Разложение определителя по строке	39
§2. Основные свойства определителей	41
ГЛАВА 4. Обратная матрица и способы ее вычисления	44
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ	50
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	69
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	73
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	93
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Матрицы, действия над матрицами, элементарные преобразования над строками матриц; ступенчатая форма матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Однородные и неоднородные системы, свойства решений. Метод Гаусса исследования и решения систем уравнений. Определители, способы вычисления. Обратная матрица и способы ее вычисления, Модель Леонтьева межотраслевого баланса.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М., 1977.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., 1966.

Дополнительная

3. Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., 1966.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1980.
5. Ахиезер Д.Н., Красовская И.А. Линейная алгебра: Методические указания. М.: МИСИ, 1985.
6. Пискунов Л.С. Дифференциальные и интегральные исчисления. Т.2. М., 1978.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР*

Широкое применение математических методов в самых различных областях науки, техники, экономики и в практической деятельности инженеров предъявляет повышенные требования к изучению математических приемов. Особенно важны методы и приемы линейной алгебры, наиболее простые и важные из которых рассматриваются в этом курсе.

В задачи нашего курса входит ознакомление с действиями над матрицами, изучение определителей и в конечном счете, - исследование систем линейных уравнений, т.е. выяснение вопроса о существовании и единственности решений и методов их поиска.

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ.

§1. Основные определения и примеры

§1. Прямоугольной матрицей типа $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ действительных чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, где m –

число строк, n – число столбцов таблицы. Так, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица

типа 2×3 , или, как говорят, B – матрица порядка 2×3 (два на три).

Будем записывать матрицу следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно $A = (a_{ij})_{mn}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица A имеет порядок $m \times n$, у нее m строк и n столбцов.

Числа a_{ij} называются элементами матрицы, числа i, j называют индексами

элемента a_{ij} , индексы определяют положение элемента матрицы в таблице: первый индекс i – номер строки, второй j – номер столбца, в которых расположен элемент матрицы.

Таким образом, элемент $b_{23} = 2$ в предыдущей матрице B стоит на пересечении 2-ой строки и 3-го столбца. Все элементы одной и той же строки имеют одинаковый первый индекс, а все элементы одного столбца – одинаковый второй

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

индекс. Так, третья строка матрицы - A_{mn} состоит из элементов $a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}$.

Заметим, что обычно матрицу и ее элементы обозначают одинаковой буквой, только матрицу обозначают большой буквой, а элементы—соответствующей малой буквой с индексами. Матрица A называется квадратной, если число ее строк совпадает с числом ее столбцов, т.е. $m=n$.

Это общее число называют порядком матрицы.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ является квадратной матрицей

порядка 3. Совокупность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образует **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ - **побочную**. В приведенном примере у матрицы A на главной диагонали стоят элементы $a_{11} = -1, a_{22} = 0, a_{33} = -1$, а на побочной $a_{13} = 0, a_{22} = 0, a_{31} = 3$.

Частным случаем прямоугольной матрицы являются вектор-строка и вектор-столбец. Так, матрицу $C_{14} = (0, 1, 1, -2)$ порядка 1×4 можно, конечно,

рассматривать как четырехмерный вектор $(0, 1, 1, -2)$, а матрицу $D_{51} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ как

вектор $(5, 1, -1, 0, 2)$ пятимерного арифметического пространства. Понятие о таких многомерных векторах и действиях над ними было дано в юните 1.

81 Особую роль в матричном исчислении играет **единичная** матрица. Это

квадратная матрица следующего вида $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные эле-

менты—нулевые.

a_{11}, a_{12}, a_{13}
 a_{21}, a_{22}, a_{23}
 a_{31}, a_{32}, a_{33}

87

Введем еще **нулевую** матрицу

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Позднее мы увидим, что единичная матрица E и нулевая O играют в матричном исчислении такую же роль, как числа 1 и 0 в операциях над числами.

88

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Так, матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$ - верхнетреугольная, а

матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$ - нижнетреугольная.

§2. Действия над матрицами

2.1. Равенство матриц

Введем понятие равенства матриц. Две матрицы одинакового порядка называются **равными** $A_{mn} = B_{mn}$, если все элементы с одинаковыми индексами обеих матриц совпадают. Например, если

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$b_{11} = -1, b_{12} = 0, b_{13} = 1, b_{21} = b_{22} = b_{23} = 5.$$

2.2 Сложение матриц

Суммой двух матриц одного порядка называется матрица того же типа, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц - слагаемых. Таким образом,

$$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Например, если $A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B_{23} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, то их сумма

$$C_{23} = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если O —нулевая матрица, то $A+O=O+A=A$ (только порядок матрицы O должен быть тот же, что порядок A).

Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:

$A+B=B+A$ (коммутативность сложения);

$(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность операции сложения).

2.3. Умножение матрицы на число

Произведение матрицы A на число λ - это новая матрица $B=\lambda A$, которая имеет тот же порядок, а элементы $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для всех индексов i, j .

Например, $-4 \cdot E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -4 \end{pmatrix}$, а в матрице $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 6 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ можно

вынести число 2 за знак матрицы и написать $C = 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Операция умножения матрицы на число имеет следующие свойства:

если α, β – действительные числа, а A и B —матрицы, то

$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Заметим, что введенные операции применимы только к матрицам одного порядка (с одинаковым числом строк у A и B и одинаковым числом столбцов у A и B), причем для получения матрицы $C=A \cdot B$ следует из элементов матрицы A вычесть соответствующие элементы матрицы B .

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, а λ - некоторое число. Тогда

характеристическое уравнение

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

§ 2.4. Умножение матриц

Более сложное правило применяется для перемножения матриц. Первый вопрос, который тут возникает, - какие две матрицы можно «перемножать».

Пусть A - матрица порядка $m \times n$, т.е. имеющая m строк и n столбцов. Чтобы матрицу A умножить на матрицу B , нужно, чтобы B имела размерность $n \times k$, т.е. число строк у B равно числу столбцов A . Числа m и k могут быть произвольными. Матрица-произведение $C = A \cdot B$ будет иметь порядок $m \times k$, у нее будет столько строк, сколько у A_{mn} (первого сомножителя), а число ее столбцов будет равно k , т.е. числу столбцов B_{nk} (второго сомножителя).

Так, матрицу $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ можно умножить на

матрицу $B_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Произведение будет иметь порядок 2×3 . Теперь

сформулируем правило умножения $C = A \cdot B$. Выделим i -ю строку матрицы A и j -й

столбец матрицы B : $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$; $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$.

Длина выделенной строки и высота выделенного столбца будут одинаковы. Перемножим попарно элементы выделенных векторов, стоящие на одинаковых местах, и сложим (т.е. подсчитаем скалярное произведение этих

векторов). Обозначим полученную сумму c_{ij} и поставим ее в матрицу C на пересечение i -й строки и j -го столбца:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Проделаем эту операцию с каждой строкой матрицы A и с каждым столбцом B , постепенно заполняя матрицу-произведение C .

Применим наше правило к умножению $A_{23} \cdot B_{33}$.

1-я строка матрицы A - $(1 \ -1 \ 2)$, 1-й столбец B - $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; поэтому

$c_{11} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$; 1-я строка A и 2-й столбец матрицы B дадут

$c_{12} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2$. Далее, $c_{13} = -1 + 0 + 2 = 1$. Аналогично c_{21}

получится при умножении 2-й строки A и 1-го столбца B : $(0, 1, 1)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_{21} = 3$.

Теперь вычислим $c_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, $c_{23} = 1$. Наконец, заполним

матрицу C : $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц подчиняется свойству **ассоциативности** $(AB)C = A(BC)$, т.е. при перемножении трех матриц можно сначала перемножить первые две, а потом произведение умножить на третью, но результат не изменится, если умножить первую матрицу A на произведение второй B и третьей C . Однако, в отличие от умножения чисел, результат умножения матриц зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей. Таким образом, **свойство перестановки сомножителей при умножении матриц отсутствует** (операция перемножения матриц не коммутативна). Это значит, что AB может быть не равно BA . В случае прямоугольных матриц может оказаться, что произведение AB определено, тогда как BA не обязательно определено. Так, в предыдущем примере нельзя вычислить произведение BA , так как число столбцов матрицы B (три столбца) не равно числу строк A (2 строки).

Если же A и B — квадратные матрицы одного порядка, то оба произведения AB и BA существуют, но не обязательно $AB = BA$.

Рассмотрим такой пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Особую роль при умножении матриц играет единичная матрица E , она выполняет роль числа 1 при умножении чисел. Если x —число, то $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ при каждом x , т.е. умножение на единицу не меняет числа. Легко проверить, что при **умножении квадратной матрицы A на E матрица A не изменится**, и что только матрица E обладает этим свойством (единица одна!), $AE=EA=A$.

Произведение чисел может равняться 0 только в том случае, когда хотя бы одно из них равно 0. Однако произведение матриц не наследует это свойство.

Более того, возможно, что $A^2 = 0$, хотя $A \neq 0$ не совпадает с 0-матрицей.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ или еще

пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq O; AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.

Если существуют произведения AB и BA , причем $AB=BA$, то матрицы A и B называют **перестановочными**. Так, единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка.

С введением операции умножения матриц появилась возможность рассматривать возведение матрицы в степень $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$

Пример.

Найдем A^4 и A^3 , если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Имеем $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E; A^3 = A^2 \cdot A = EA = A$.

Далее $A^4 = A^2 \cdot A^2 = E \cdot E = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вообще, для данной матрицы A

$$A^n = \begin{cases} E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если } n - \text{четно} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A, \text{ если } n - \text{нечетно} \end{cases}$$

0+ $\Delta \det S = 0 \cdot 0$

2.5. Транспонирование матрицы

Пусть дана матрица A_{mn} порядка $p \times m$. Поменяем в ней местами строки со столбцами: на место 1-й строки поставим 1-й столбец, на место 2-й строки-2-й столбец и т.д. Обозначим эту новую матрицу A^T .

$$\text{Итак, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T называется транспонированной к A , она имеет порядок $m \times p$.

$$\text{Например, если } A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{4,3}.$$

$$\text{Если } A - \text{вектор-строка } A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец.}$$

Для элементов транспонированной матрицы имеем

$$a_{kl}^T = a_{lk}, k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m.$$

Если A - квадратная матрица, то A^T - квадратная того же порядка. Если квадратная матрица не изменилась после транспонирования, т.е. $A^T = A$ то A

называют **симметричной матрицей**.] Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ -

симметричная.

У каждой симметричной (симметрической) матрицы элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Порядки A и A^T согласованы, число столбцов A (4 столбца) равно числу строк A^T (4 строки). Поэтому определено произведение:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

т.е. произведение $A^T \cdot A$ также имеет смысл.

Завершая первоначальное знакомство с матрицами, нельзя не сказать о той роли, которую играет алгебра матриц. Американский математик Ричард Беллман называл теорию матриц «арифметикой высшей математики». Это сравнительно «молодой» раздел математики. Упоминание о матрицах впервые встречается в середине XIX века в работах ирландского астронома и математика У. Гамильтона (1805-1865) и у английских математиков Дж. Сильвестра (1814-1897) и А. Кэли (1821-1895). Основы теории матриц были заложены во второй половине XIX века немецкими математиками К. Вейерштрассом (1815-1897) и Фробениусом (1849-1917). Теория матриц продолжает развиваться до сих пор. Этому способствуют многочисленные и разнообразные приложения матриц. Отметим некоторые из них. Уже в школьном курсе приходится встречаться с системой двух или трех уравнений 1-й степени

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

где числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ и b_1, b_2, b_3 - заданы, а x_1, x_2, x_3 - неизвестные, которые подлежат определению.

Мы в дальнейшем будем подробно рассматривать, как следует находить эти неизвестные x_1, x_2, x_3 , т.е. как решать систему уравнений. Сейчас же заметим, что такая система определяется заданием матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ заданием вектора-столбца } \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ неизвестные}$$

x_1, x_2, x_3 можно считать неизвестными координатами вектора-столбца

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \text{ Введя такие обозначения, легко проверим, что наша система (1)}$$

коротко запишется в матрично-векторном виде:

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (2)$$

В реальной жизни приходится иметь дело с системами уравнений, где порядок матрицы A определяется несколькими десятками. Понятно, насколько удобно применять компактную запись (2) вместо громоздкой (1). Мы увидим, что и при решении таких систем уравнений используется матричный аппарат.

Особенно широкое применение получили методы линейной алгебры и теории матриц при математическом моделировании экономических процессов.

В 40-х годах возникли методы, позволяющие решать экстремальные задачи экономики. Один из таких разделов математики называется линейным программированием. Большую роль в развитии методов линейного программирования сыграли работы советского академика Л.В. Канторовича (1912-1986). За эти работы он был удостоен Нобелевской премии по экономике в 1975 г.

Рассмотрим такую задачу линейного программирования. Пусть некоторый завод выпускает два новых строительных материала, назовем их I и II.

От продажи 1 тонны I завод получает 5, а от продажи 1 тонны II—6 условных единиц прибыли. Для выпуска этих строительных материалов завод использует следующие ресурсы: цемент, гравий, сталь, рабочую силу (человеко-дни). Конечно, набор этих ресурсов в реальной жизни гораздо более широкий. Ресурсы, которые

использует завод за рассматриваемый период времени, ограничены. Потребности каждого из ресурсов для выпуска 1 т I и II строительных материалов указаны в таблице 1. В этой же таблице в последней строке записаны ограничения на

Таблица 1

материалы	цемент	гравий	сталь	рабочая сила	Доход от единицы	план выпуска
I	34	15	3	100	5	x_1
II	27	25	2	120	6	x_2
ограничения ресурсов	800	1200	50	2000		

ресурсы. Пусть завод составил некоторый план выпуска материалов $\bar{x}(x_1, x_2)$, т.е. предполагается выпустить материала I в количестве x_1 тонн, а материала II - в количестве x_2 тонн. Тогда запланированная прибыль при продаже по ценам вектора $\bar{c}(5,6)$ составит $P = 5x_1 + 6x_2$.

Подсчитаем теперь, какое количество каждого ресурса пойдет на выполнение этого плана.

Ресурс - цемент используется и первым и вторым материалом, и на выпуск плана будет затрачено $34x_1 + 27x_2$, гравий будет использован в количестве $15x_1 + 25x_2$, сталь - в количестве $3x_1 + 2x_2$ и, наконец, рабочая сила используется заводом в количестве $100x_1 + 120x_2$. Тогда ограничения на ресурсы составят систему неравенств:

$$\begin{cases} 34x_1 + 27x_2 \leq 800 \\ 15x_1 + 25x_2 \leq 1200 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ 100x_1 + 120x_2 \leq 2000 \end{cases}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{эти неравенства учитывают}$$

смысловое значение x_1, x_2).

Задача может быть формализована и записана в векторно-матричном виде. Итак, вектор планового выпуска $\bar{x}(x_1, x_2)$ вектор прибыли

$\bar{c} = (c_1, c_2) = (5, 6)$. Матрица использованных ресурсов $A = (a_{ij})_{4,2}$

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 27 \\ 15 & 25 \\ 3 & 2 \\ 100 & 120 \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} - \text{потребность } i\text{-го ресурса для выпуска едини-}$$

цы j -ого материала, $i=1,2,3,4$; $j=1,2$. Вектор $\bar{b} = (800, 1200, 50, 2000)$ - вектор ограничения ресурсов. Математическая модель решаемой заводом задачи выглядит так: максимизировать прибыль $P(\bar{c}, \bar{x})$ при ограничениях-неравенствах

$A\bar{x} \leq \bar{b}, \bar{x} \geq 0$; векторы $\bar{x}$ и $\bar{b}$ записаны в столбец.

Очевидно, содержание задачи можно изменить, заменив малый строительный завод большим предприятием, выпускающим продукты питания, или министерством, пытающимся накормить и обеспечить всем необходимым армию при ограниченных ресурсах.

Как решать подобные задачи, мы здесь обсуждать не будем.

§3. Понятие ранга матрицы

Пусть имеется некоторая матрица A_{mn} . Рассмотрим строку этой матрицы с номером i (i -ую строку). Она является упорядоченным набором n действительных чисел, т.е. является вектором n -мерного арифметического пространства R^n . Обозначим этот вектор $\bar{a}_i (i=1,2,\dots,m)$, $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$. Теперь

матрицу A можно записать так:
$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$
 Аналогично,

обозначив $\bar{a}^j$ вектор столбец матрицы A , стоящий на j -месте, будем иметь

$$\bar{a}^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \text{ вектор } \bar{a}^j \text{ является } m\text{-мерным вектором, а матрица } A \text{ может быть}$$

записана так:

$$A = (\bar{a}^1, \bar{a}^2, \dots, \bar{a}^n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В юните 1 уже обсуждалось понятие системы линейно независимых векторов в пространстве R^n . Напомним, что векторы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{u}$ **линейно независимы**, если никакой из них не является линейной комбинацией других. В противном случае векторы линейно зависимы. Поэтому будем считать строки (столбцы) матрицы A линейно зависимыми, если хотя бы одна из них линейно

выражается через другие. Например, в матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ элементы

третьей строки получаются, если сложить элементы второй и удвоенные элементы первой строки на соответствующих местах, иначе говоря, вектор-строка $\bar{a}_3 = 2 \cdot \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ представляют систему линейно независимых

векторов, присоединив к ним вектор $\bar{a}_3$, получим систему вектор-строк $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ уже линейно зависимых, т.е. максимальное число линейно независимых строк матрицы A равно 2. Можно показать, что максимальное число линейно независимых вектор-столбцов равно максимальному числу линейно независимых строк. Это общее число называется **рангом матрицы** A . Ранг матрицы является важной характеристикой матрицы.

Пример. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, векторы-строки этой матрицы (или ее

столбцы) $\bar{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\bar{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\bar{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$ составляют линейно независимую систему, они являются базисными векторами в пространстве R^n . Обозначим $r(A)$ - ранг матрицы A , тогда $r(E) = 4$.

§ 4. Элементарные преобразования над строками матрицы.

Приведение матрицы к ступенчатому виду.

89

Пусть A -матрица порядка $m \times n$. Как уже отмечалось, каждая строка является вектором пространства R^n . Определим элементарные преобразования над строками матрицы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$, где $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Запись $A \rightarrow B$ означает, что матрица B получена из матрицы A элементарными преобразованиями. Матрица B остается матрицей того же порядка, что и матрица A . Обозначим строки преобразованной матрицы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m$.

Элементарные преобразования бывают двух типов:

1) К одной из строк A , скажем $\bar{a}_i$, прибавляется другая строка, скажем $\bar{a}_k$, где $k \neq i$, предварительно умноженная на числовой коэффициент λ , все остальные строки A не меняются, а переписываются в B без изменения. Таким образом $\bar{b}_i = \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_k$, $\bar{b}_l = \bar{a}_l$, если $l \neq i$. Заметим, что k -я строка матрицы A тоже не меняется.

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Прибавим к второй строке ($i=2$)

нашей матрицы первую строку ($k=1$), умноженную на число $\lambda=2$. Результат запишем на месте второй строки; 1-я и 3-я строки не меняются.

$$A \rightarrow B, \text{ где } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прделаем еще один шаг, сделаем еще одно преобразование 1-го типа: прибавим к 3-й строке первую, умноженную на $\lambda = -1$, т.е. вычтем из третьей строки первую, написав результат на месте 3-й строки, причем 1-ю и 2-ю не

меняем: $B \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Заметим, что при элементарных преобразованиях 1-го типа число линейно независимых строк матрицы не меняется, т.е. **ранг матрицы не меняется**.

2) Элементарное преобразование 2-го типа состоит в следующем: две строки матрицы A , скажем i -я и k -я, меняются местами, при этом остальные строки остаются на своих местах, $\bar{b}_k = \bar{a}_i, \bar{b}_i = \bar{a}_k, \bar{b}_l = \bar{a}_l, (l \neq i, k)$.

Например, в той же матрице A поменяем местами 1-ю ($i=1$) и 3-ю ($k=3$) строки, 2-я строка ($l=2$) остается без изменения:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что и в случае элементарного преобразования второго типа $A \rightarrow B$ ранг матрицы не меняется $r(A) = r(B)$.

Возникает вопрос, зачем нужно делать такие преобразования над матрицей. Нашей целью будет приведение матрицы A к ступенчатому виду. Схематично ступенчатая матрица изображена на рис. 1.

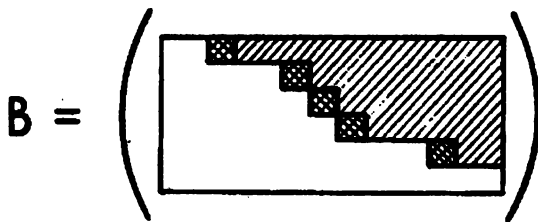


Рис. 1.

Незаштрихованная часть матрицы занята нулями. В клетках, покрытых двойной штриховкой, стоят ненулевые элементы. Они называются **угловыми элементами**. Остальные элементы могут быть произвольные. Если у ступенчатой матрицы есть **нулевые строки**, то они стоят внизу. Например,

$$B = \begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ - ступенчатая матрица.}$$

«Длина ступеньки» не обязательно равна 1. (например, первая ступенька в матрице B).

Пример. Пусть B —верхнетреугольная матрица любой размерности, она

имеет ступенчатую форму: $B = \begin{pmatrix} \underline{1} & -4 & 3 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \end{pmatrix}$.

Определить ступенчатую матрицу можно так: если в матрице в i -й строке левее элемента a_{ij} стоят только нули, то и ниже этого элемента в j -м столбце тоже стоят только нули. Приведение матрицы к ступенчатому виду поможет нам легко справиться с решением систем линейных уравнений. **Метод приведения матрицы к ступенчатому виду** с помощью элементарных преобразований 1-го и 2-го типа называют **методом Гаусса**. 89

Следующее утверждение является основным в методе Гаусса.

Теорема. Каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство этой теоремы дает практический способ приведения матрицы к ступенчатому виду. Для этого следует последовательно провести несколько шагов элементарных преобразований.

Рассмотрим этот способ на примере матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгоритм метода Гаусса состоит в следующем.

1. «Загоним» в левый верхний угол ненулевой элемент ((1) или (-1), если возможно) путем перестановки строк, т.е. элементарным преобразованием 2-го типа. Поменяем местами первую и третью строки. В дальнейшем первую строку

больше менять не будем. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Теперь с помощью элемента $a_{11} = 1$ получим нули всюду в первом столбце, кроме левого верхнего элемента. Для этого прибавим ко второй строке первую, умноженную на (-2); получим ноль в начале второй строки. В третьей строке уже стоит 0 в первом столбце, поэтому третью строку менять не будем, ее перепишем

в следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

В дальнейшем первый столбец меняться не будет (как и первая строка), их можно мысленно исключить из преобразований.

2. Теперь «ведущим» элементом будет элемент a_{22} , стоящий в левом верхнем углу «уменьшенной» матрицы. Поменяем местами вторую и третью строку, чтобы «загнать» в этот угол единицу из последней строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Под отмеченной единицей в средней матрице следует получить 0, для чего, не меняя первой и второй строки, к третьей прибавляем вторую, умноженную на 2. Этот последний вид матрицы - ступенчатый, угловые элементы (число их 2) отмечены и каждый из них равен единице.

Последовательность элементарных преобразований, приводящих матрицу А к ступенчатой форме, и самый ступенчатый вид В определены неоднозначно. Однако число угловых элементов ступенчатой матрицы В, т.е. число ее ненулевых строк, не зависит от способа приведения исходной матрицы к ступенчатому виду.

Число ненулевых угловых элементов в ступенчатой форме матрицы равно рангу матрицы.

Пример. Найдем ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Имеем: 1-й шаг 2-й шаг 3-й шаг

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ +}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = B$$

Прокомментируем каждый шаг алгоритма.

1-й шаг: меняем местами первую и вторую строки, оставляем в дальнейшей первую строку без изменения.

2-й шаг: прибавляем к второй строке первую, умноженную на (-2), а к третьей строке прибавляем первую, умноженную на 2. В результате получим в первом столбце все нули, кроме верхнего элемента.

3-й шаг: с помощью отмеченного элемента (-2) получим нулевой элемент вместо числа 3.

Для этого умножим вторую строку на $\frac{3}{2}$ и прибавим к третьей строке.

Получаем ступенчатую матрицу В с тремя угловыми элементами (отмечены).
Ранг исходной матрицы $r(A) = r(B) = 3$.

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§1. Основные понятия и определения.

Нам уже приходилось встречаться с системами двух и трех линейных уравнений. Общая система из m линейных уравнений с n неизвестными записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots b_3 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

система уравнений

Заметим сразу, что число уравнений m , вообще говоря, не обязательно совпадает с числом неизвестных n .

В качестве такой системы уравнений можно предложить следующую задачу: поставщик продавал в течении 4-х кварталов года заказчику 4 вида товаров;

a_{kl} - это известное количество (в условных единицах) товара l -ого вида ($l=1,2,3,4$), проданного в k -ом квартале ($k=1,2,3,4$). Цена условной единицы каждого из 4-х видов товара x_1, x_2, x_3, x_4 неизвестна. Требуется найти значение этих цен по

известным значениям сумм квартальных платежей b_1, b_2, b_3, b_4 . Математической моделью такой задачи будет система 4-х уравнений с 4-мя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

В общем случае матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ имеет порядок $m \times n$,

состоит из коэффициентов при неизвестных в системе (1) и называется **матрицей системы уравнений**. Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координатами которого являются неизвестные нашей системы, называется **вектором неизвестных**, а вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ - это **вектор правых частей уравнений**. Обычно оба эти

вектора $\bar{x}$ и $\bar{b}$ записываются как векторы-столбцы $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$ называется **расширенной матрицей системы**.

Ее последний столбец играет особую роль, поэтому будем отделять его вертикальной чертой. Если хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, \dots, b_m$ **не равно нулю**, то система (1) называется **неоднородной системой**. Если же в правой части системы уравнений (1) стоят только нули ($b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$), то систему

называют **однородной**. Вектор-столбец $\bar{x}$, т.е. набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, называется **решением системы уравнений**, если при подстановке чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ в уравнения системы **получаются верные равенства**.

Решить систему уравнений (1) - значит найти или описать все такие векторы-решения.

Две системы называются **эквивалентными**, если каждое решение первой является решением второй и каждое решение второй является решением первой. Если к некоторому уравнению системы прибавить другое, умноженное на число, то решения системы не меняются, т.е. полученная новая система остается эквивалентной прежней.

При перестановке двух уравнений системы (1) она также заменяется на эквивалентную. Заметим, что эти операции над системой уравнений сводятся к элементарным преобразованиям 1-го и 2-го типа над расширенной матрицей

$\bar{A}$. Таким образом, **элементарные преобразования** над системой (1) **не меняют**

Умножим матрицу A справа на вектор $\bar{x}$. Вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ можно

рассматривать как матрицу с n строками и одним столбцом $\bar{x}_{n1}$. Напомним, что в этом случае перемножение $A_{mn}\bar{x}_{n1}$ возможно (число столбцов A равно числу строк $\bar{x}$), произведением будет вектор-столбец, число строк его равно m , числу строк A . При умножении каждая строка A скалярно умножается на $\bar{x}$:

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Полученные координаты произведения сравним с выражениями, стоящими в левой части системы уравнений (1). Оказывается, они совпадают. Поэтому систему (1) можно записать в векторно-матричном виде:

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (2)$$

Соответствующая однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

в векторно-матричной форме запишется так: $A\bar{x} = \bar{0}$, где $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ -

нулевой вектор в пространстве R^m . Система уравнений (1) может не иметь ни

одного вектора-решения.

Например, $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

Действительно, из первого уравнения найдем, что $x_1 = x_2$, но тогда разность $(x_1 - x_2)$ не будет принимать значения 1, т.е. второе уравнение не имеет решений ни при каких $x_1 = x_2$. Такая система уравнений, у которой не существует решения, называется **несовместной**. Если же система совместна, она может иметь одно решение или больше (фактически бесчисленное множество).

Так, система $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$ совместна, любой вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

компоненты которого $x_1 = 1 + x_2$, будет решением системы.

Изменим немного нашу систему $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

Тогда из второго уравнения $x_1 = -x_2$ и, подставляя в первое уравнение, получим $-2x_2 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}$. В данном случае пара x_1, x_2 однозначно

определена и система имеет **единственное** решение $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

§2. Однородные системы уравнений. Основные свойства. Общее решение системы.

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3), \text{ или } A\bar{x} = 0 \quad (4).$$

Отметим, прежде всего, что такая система всегда совместна. Действительно,

вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{pmatrix}$, т.е. $\bar{0}$ - нуль-вектор является решением системы (3)-

(4).

Говорят, что множество решений системы (3) не пусто (оно содержит вектор $\bar{0}$). Следующие важные свойства относятся только к однородным системам.

Свойство 1. Если вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - решение системы (3), а α - некоторое

число, то вектор $\alpha \bar{x}$ тоже решение системы (3).

Действительно, подставим вектор $\alpha \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ в короткую запись системы

(4) и воспользуемся тем, что числовой множитель можно выносить при умножении матриц: $A(\alpha \bar{x}) = \alpha \cdot A\bar{x} = \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$, $A\bar{x} = \bar{0}$, т.к. вектор $\bar{x}$ - решение

(4). Таким образом, если мы нашли набор-решение $x_1, x_2, \dots, x_n$, то умножив его на число, снова получим решение системы.

Свойство 2.

Если вектора $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - два решения однородной системы,

то их сумма, вектор

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} - \text{тоже решение системы. Убедимся, что это так,}$$

подстановкой вектора $\bar{z}$ в (4): $A\bar{z} = A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.

Таким образом, решения можно складывать и умножать на числа, при этом получаем снова решения системы. Можно сказать, что однородная система уравнений имеет «линейное пространство» решений.

Переходим к обсуждению вопроса о том, как найти все решения однородной системы. Применим для этого **метод Гаусса**.

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений состоит из **прямого и обратного хода**.

Прямым ходом приведем заданную систему к ступенчатому виду. Рассмотрим соответствующую ступенчатую систему. С одной стороны, она эквивалентна исходной, а с другой, как будет показано ниже, - легко поддается исследованию и решению. Решение системы находится обратным ходом метода Гаусса.

Проиллюстрируем сказанное на примере системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что все преобразования над системой сводятся к соответствующим преобразованиям над матрицей системы.

Прямой ход метода Гаусса—приведение матрицы системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Матрица Р-ступенчатая, и первый шаг алгоритма Гаусса закончился. Вернемся теперь к той системе уравнений, которая соответствует матрице Р :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Мы отбросили последнее уравнение, все коэффициенты которого равны нулю. Заметим, что угловые элементы матрицы Р являются коэффициентами при x_1, x_2, x_3 в системе (5). Коэффициенты же при x_4 и x_5 не являются угловыми. Переходим ко второму этапу метода Гаусса—отысканию решения нашей системы. Заметим, что число переменных нашей системы $n=5$, а независимых уравнений осталось только $m=3$. Назовем переменные x_4 и x_5 , не

связанные с угловыми коэффициентами, **свободными**, а переменные x_1, x_2, x_3 - **зависимыми**. Зависимыми, или **несвободными**, всегда объявляются переменные коэффициенты при которых оказались угловыми. Заметим сразу, что при другом способе приведения матрицы к ступенчатому виду свободными переменными могли оказаться переменные с другими номерами.

Однако **число свободных переменных всегда равно $n-r$** , где n —число переменных в системе уравнений (в нашем случае $n=5$), а r - ранг матрицы, равный числу угловых элементов (в нашем случае $r=3$).

Второй этап метода Гаусса называют **обратным ходом**. Мы будем находить вектор-решение, причем сначала будем рассматривать последнее уравнение системы, а затем будем «подниматься вверх» по системе к первому уравнению (отсюда название «обратный ход»). Вернемся к системе (5). Перенесем слагаемые, содержащие свободные переменные x_4, x_5 в правую часть системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -x_4 - x_5 \\ x_2 + 2x_3 = 2x_4 - x_5 \\ 2x_3 = -x_4 + 2x_5 \end{cases} \quad (6)$$

Из последнего уравнения выразим несвободную переменную x_3 через свободные x_4, x_5 . При этом важно, что коэффициент при x_3 - это угловой элемент, а значит, отличен от нуля: $x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + x_5$. (7)

Полученное выражение для x_3 подставим в предпоследнее уравнение системы (6) и выразим из него несвободную переменную x_2 через свободные x_4, x_5 :

$$\begin{aligned} x_2 + 2\left(-\frac{1}{2}x_4 + x_5\right) &= 2x_4 - x_5 \\ x_2 - x_4 + 2x_5 &= 2x_4 - x_5 \\ x_2 &= 3x_4 - 3x_5 \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь подставляем в первое уравнение системы (6) выражения (7) и (8) для переменных x_3 и x_2 , получим для $x_1 = -\frac{9}{2}x_4 + 3x_5$.

Окончательно формулы, выражающие зависимые (несвободные)

переменные через свободные, имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2}x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 3x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + x_5 \end{cases} \quad (9)$$

95

Эту запись можно рассматривать как запись **общего решения системы (3)**.

Давая свободным переменным x_4, x_5 произвольные значения, находим по формулам (9) значения зависимых переменных и получаем решение системы. Ясно, что в записи (9) содержится бесчисленное множество решений исходной

системы, т.к. переменным x_4 и x_5 можно давать любые значения. Например, пусть $x_4 = 0, x_5 = 1$, тогда вектор $\bar{x}(3, -3, 1, 0, 1)$ будет решением системы. Или

если $x_4 = 1, x_5 = 0$, тогда вектор $\bar{y}(-\frac{9}{2}, 3, -\frac{1}{2}, 1, 0)$ другое решение системы;

при $x_4 = x_5 = 1$ получим $\bar{z}(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1)$ - тоже решение.

Векторы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ называют ⁹⁵**частными** решениями системы. Они получаются из общих формул (9), если подставлять в них конкретные значения свободных переменных. Особую роль играют системы уравнений, которые имеют единственное решение. В случае такой системы нет свободных переменных т.е. ступенчатая форма матрицы имеет верхнетреугольный вид.

$$\text{Пример: } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Преобразованная система имеет вид } \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_3 = 0$, подставляя x_3 во второе уравнение, получим $x_2 = 0$, а затем и $x_1 = 0$. Мы нашли единственное решение системы $\bar{x}(0, 0, 0) = \bar{0}$.

Таким образом, если **число угловых элементов** оказалось в ступенчатой форме **равным числу переменных**, $n=3$, то система имеет единственное решение, таким решением однородной системы является $\bar{0} = (0, 0, 0)$ - нуль-вектор. Нулевое решение однородной системы называют **тривиальным**.

Основные свойства решений.

96

96

(10)

(11)

(11)

системы A_{mn} , свободный вектор правых частей $\bar{b} = \bar{0}$, т.е.

(12)

умножать на числа, снова получались решения той же системы. С неоднородными системами дело обстоит иначе. Справедливы следующие утверждения.

вектор $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ является решением соответствующей однородной системы. Проверим это подстановкой в систему (12):

$$A\bar{z} = A(\bar{x} - \bar{y}) = A\bar{x} - A\bar{y} = \bar{b} - \bar{b}, A\bar{z} = \bar{0}.$$

мы (10), $\bar{y}$ - вектор решение соответствующей однородной системы (12).

ляем $\bar{z}$ в систему (11): $A\bar{z} = A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}$, $A\bar{z} = \bar{b}$. Это означает, что к решениям однородной системы можно прибавить решение неоднородной, получим решение неоднородной системы.

100 решению соответствующей однородной системы прибавить некоторое частное решение неоднородной. Как только что было показано, такая сумма будет решением неоднородной системы. Кроме того, в этой сумме будут содержаться все решения неоднородной системы.

совместна, поэтому прежде чем находить все решения системы, нужно выяснить вопрос, существует ли у системы хотя бы одно решение, т.е. разрешима ли система (10).

Чтобы прояснить вопрос о совместности системы, рассмотрим пример:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array} \right) = P$.

99 Выпишем расширенную матрицу $\bar{A}$ и методом Гаусса приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = P$$

Матрица P имеет ступенчатый вид, имеет три угловых элемента, ранг расширенной матрицы равен 3. Заметим, что и нерасширенная матрица (до вертикальной черты) одновременно тоже приведена к ступенчатому виду, но она имеет ранг $r=2$.

Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 - 16x_4 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1 \end{cases}$$

Видно, что не существует таких числовых значений x_1, x_2, x_3, x_4 , чтобы последнее уравнение выполнялось, а значит, система несовместна. Всегда, если в ступенчатом виде расширенной матрицы есть строка, в которой до вертикальной черты стоят только нули, а за вертикальной чертой стоит ненулевой элемент, можно сделать вывод о **несовместности** системы уравнений. Описанная ситуация означает, что **ранг расширенной матрицы больше на 1 ранга основной матрицы** (в нашем случае $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$)

Если же $r(A) = r(\bar{A})$, т.е. ранги расширенной и основной матрицы

совпадают, то ступенчатая форма P заканчивается нулевыми строками.

В этом случае исходная система совместна. Мы получили следующий важный результат.

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности неоднородной системы):

Система (10) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы равны, $r(A) = r(\bar{A})$.

Научимся теперь находить решения неоднородной системы в случае ее совместности.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 11x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -11 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -14 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = P$$

Поскольку и в расширенной и в основной матрице 3 ступеньки, то $r(A) = r(\bar{A})$, система совместна. Эквивалентная ступенчатая система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \quad (13)$$

Мы отбросили последнее уравнение, которое выполняется тождественно (при всех значениях x_1, x_2, x_3, x_4 имеем $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$).

Обратный ход метода Гаусса начинается с того, что объявляем переменные x_1, x_2, x_3 («связанные» с угловыми элементами) несвободными, а переменную x_4 - свободной. Выражаем через эту свободную переменную x_4 остальные:

$$\begin{cases} x_1 = -4x_4 - 14 \\ x_2 = -2x_4 - 9 \\ x_3 = -x_4 - 3 \end{cases} \quad (14)$$

Сначала из последнего уравнения (13) мы нашли x_3 , затем, подставляя выражение для x_3 , через x_4 во второе уравнение (13), получили выражение x_2 через x_4 и, поднимаясь еще «выше», находим x_1 .

Последние формулы (14) являются записью общего решения системы. Давая переменной x_4 конкретные числовые значения и вычисляя x_1, x_2, x_3 , получаем все решения системы.

Например, если $x_4 = 0$, то $x_1 = -14, x_2 = -9, x_3 = -3$, и вектор $\bar{x}(-14, -9, -3, 0)$ будет частным решением системы.

Отметим следующий важный факт. Общее решение соответствующей однородной системы в нашем примере запишется так:

$$\begin{cases} x_1 = -4x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \quad (15)$$

Из формул (14) видно, что общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения (15) однородной и частного решения $\bar{x}(-14, -9, -3, 0)$ неоднородной системы. Факт этот имеет общий характер, а именно, общее решение неоднородной системы равно сумме некоторого частного решения неоднородной системы и общего решения однородной.

Особо отметим ситуацию, когда система имеет **единственное** решение. Как и в случае однородной системы это означает, что нет свободных переменных, а **угловых элементов ровно столько, сколько переменных в задаче.**

Пример. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) = \bar{P},$$

$$r(\bar{P}) = 3.$$

$$\text{Ступенчатая система имеет вид } \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 = 1. \\ -2x_3 = -2 \end{cases}$$

Свободных переменных нет, из последнего уравнения находим, что $x_3 = 1$.

Подставляя это значение во второе уравнение, получим

$$-2x_2 = 1 - 5x_3, -2x_2 = -4, x_2 = 2.$$

Наконец, из первого уравнения $x_1 = -x_2 + 2x_3 = -2 + 2 \cdot 1 = 0$. Единственное решение системы - вектор $\bar{x} = (0, 2, 1)$.

§4. Модель Леонтьева межотраслевого баланса.

Заканчивая изложение метода Гаусса для решения систем линейных уравнений, подчеркнем, что именно этот метод и его различные модификации являются самыми распространенными и «экономными» методами решения систем линейных уравнений.

В математическом обеспечении каждого вычислительного центра обязательно есть программы для решения систем. Эти стандартные программы реализуют метод Гаусса, именно метод Гаусса требует минимальных затрат машинного времени. Мы изложили метод Гаусса применительно к ручному счету. Чтобы уменьшить ошибки округления при решении систем линейных уравнений высокого порядка на компьютере, используют метод Гаусса с выбором «ведущего» элемента. Как правило, таким элементом является максимальный по модулю коэффициент в матрице системы.

Мы уже упоминали об использовании линейной алгебры, в частности, методов исследования систем линейных уравнений в экономике. Основной задачей при математическом моделировании экономических процессов является задача создания модели **межотраслевого баланса**. Модель эта называется моделью Леонтьева (по имени ее создателя) и активно используется для управления народным хозяйством. Пусть в национальной экономике взаимодействует n отраслей. Каждая отрасль выпускает некоторый продукт, причем для его производства используется продукция других отраслей:

Обозначим **объем продукции i-й отрасли, необходимый для производства единицы продукции j-й отрасли** a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$). Составим из чисел a_{ij} квадратную матрицу. Ее называют матрицей коэффициентов затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{nn}.$$

Среди элементов матрицы могут быть нулевые. Например, если $a_{36} = 0$, то это значит, что для производства продукции 3-й отрасли продукция 6-й отрасли не используется.

Рассмотрим некоторый промежуток времени, например, год или месяц.

Пусть вектор-план валового выпуска продукции за этот промежуток времени

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{где } x_1 - \text{единиц продукции выпускает 1-я отрасль, 2-я отрасль за это}$$

время выпустит x_2 единиц продукции, и, вообще, j-я отрасль выпустит x_j единиц своего продукта ($j=1, 2, \dots, n$). Выпускаемая продукция потребляется другими отраслями, т.е. часть выпуска каждой отрасли затрачивается для производства. Подсчитаем, например, сколько единиц продукта i-й отрасли затрачивается на выпуск плана $\bar{x}$: $a_{i1} \cdot x_1$ - столько единиц продукции i-й отрасли пойдет на выпуск

x_1 единиц 1-й отрасли, $a_{i2} \cdot x_2$ - на производство x_2 единиц продукта 2-й отрасли, ..., $a_{in} \cdot x_n$ - столько заберет из выпуска x_i отрасль n-я.

Полные затраты i-й отрасли составят величину

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, (i = 1, 2, \dots, n).$$

Из выпуска x_i на потребление и накопление остается разность $x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)$ которая называется конечным спросом i-го продукта.

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

§1. Определители второго и третьего порядка.

Разложение определителя по строке.

Еще одной важной характеристикой матрицы A порядка $n \times n$, т.е. квадратной матрицы, является ее определитель. **Определитель** матрицы A - это число, которое ставится в соответствие матрице A , обозначается $|A|$, или $\det A$; порядок квадратной матрицы A число n называется **порядком определителя**. Рассмотрим сначала понятие определителя применительно к матрице второго и третьего порядка.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Поставим в соответствие такой матрице число $\det A$,

полученное из элементов матрицы A по следующему правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, то $\det A = -1 - 10 = -11$.

Пусть теперь квадратная матрица имеет порядок $n=3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определителем третьего порядка называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \quad (1).$$

Определитель третьего порядка состоит из шести слагаемых, каждое из которых является произведением трех элементов матрицы, причем три слагаемых умножены на (-1) .

Сформулируем правило вычисления определителя третьего порядка «разложением по 1-й строке»: рассмотрим элементы 1-й строки a_{11}, a_{12}, a_{13} ; возьмем

первый из них a_{11} , вычеркнем мысленно из матрицы A первую строку и первый

столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{11} ; оставшаяся квадратная матрица второго порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{имеет определитель } \det A = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}. \text{ Величина}$$

эта является **алгебраическим дополнением элемента** a_{11} и обозначается

$$A_{11} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ где } i=1, j=1.$$

Следующий элемент в первой строке a_{12} , его индексы $i=1, j=2$, алгебраическое дополнение элемента a_{12}

$$A_{12} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель второго порядка получен после «вычеркивания» первой строки и второго столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{12} .

Аналогично, $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ будет алгебраическим дополнением

элемента a_{13} . Здесь $i=1, j=3$, определитель второго порядка остался в матрице A после вычеркивания 1-й строки и 3-го столбца. Будем считать, по определению, что определителем $\det A$ матрицы третьего порядка называется число

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (2)$$

Формулу (2) называют **разложением определителя по первой строке**. Легко проверить, что число, вычисленное по этой формуле, совпадает с числом, найденным по формуле (1).

Из общих соображений ясно, что первая строка матрицы A не «лучше» других ее строк или столбцов. Поэтому такое же разложение можно записать для любого ряда матрицы и получить тот же определитель A , совпадающий с числом, найденным по формуле (1).

$$\text{Пример: } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\det A$ разложением по третьему столбцу, элементы которого $a_{13} = 3, a_{23} = 1, a_{33} = 2$, а их алгебраические дополнения

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда $\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$.

Применим теперь для вычисления того же определителя разложение по 2-й строке: $a_{21} = 0, a_{22} = 1, a_{23} = 1, A_{21} = 2, A_{22} = 5, A_{23} = 1$,

$$\det A = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 6.$$

То же значение получим, применив формулу (1).

Перенесем это определение на матрицу n -го порядка

$$A = (a_{ij})_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы, полученным разложением по i -й строке, называется число $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, где $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ - элементы i -й строки A , а $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ - их алгебраические дополнения.

Квадратная матрица называется **невыврожденной**, если ее **определитель отличен от нуля**, $\det A \neq 0$. Свойство невырожденности является важной характеристикой матрицы.

103 §2. Основные свойства определителей.

Отметим без доказательства основные свойства определителей.

Мы сформулируем их применительно к строкам матрицы, но свойства дословно сохраняются при замене слова «строка» на слово «столбец».

Свойство 1. При умножении всех элементов некоторой строки матрицы на число определитель исходной матрицы умножается на это число.

Свойство 2. Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю. (Следует из свойства 1).

Свойство 3. При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак.

Свойство 4. Если две строки матрицы равны, то ее определитель равен нулю (следует из 3).

Свойство 5. Если i -я строка матрицы представляется в виде суммы двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$, то ее определитель есть сумма определителей двух матриц: у одной из них i -я строка есть $\vec{a}$, а у другой $\vec{b}$, остальные строки обеих матриц совпадают с исходной.

Свойство 6. Определитель не меняется, если к какой-нибудь строке матрицы прибавить другую ее строку, умноженную на число (элементарное преобразование 1-го типа!).

Все эти свойства легко проверить на матрицах третьего порядка. Отметим еще одно свойство определителей.

Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка **равен произведению определителей этих матриц**:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Справедливо также следующее утверждение: **определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы**.

Рассмотрим несколько примеров.

Вычислим определитель верхнетреугольной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Будем вычислять его, раскладывая по 1-му столбцу. Так как только один элемент этого столбца отличен от нуля $a_{11} = 3 \neq 0$, а остальные элементы равны

$$\text{нулю, то } \Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка, а потом и второго снова раскладываем по

$$\text{первому столбцу } \Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Легко видеть, что определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Замечание 1. При элементарных преобразованиях 1-го и 2-го типа определитель матрицы может только изменить знак (при перестановке 2-х строк). Поэтому удобно считать определитель матрицы, предварительно приведя ее методом Гаусса к ступенчатому виду.

Замечание 2. Преобразования Гаусса сводят квадратную матрицу к верхнетреугольному виду, определитель такой матрицы равен произведению диагональных элементов (см. предыдущий пример).

Такой определитель будет отличен от нуля, если среди диагональных элементов нет нулей, т.е. это означает, что в этом случае ранг исходной матрицы равен числу ее строк, или ее порядку

$\det A \neq 0$, если $r(A)=n$, где n - ее порядок.

Замечание 3. Если $r(A)=n$, то все строки матрицы линейно независимы. Таким образом, если строки матрицы линейно независимы, то ее определитель не равен нулю, а **равенство определителя нулю есть признак линейной зависимости строк матрицы.**

Пример. Вычислить определитель, пользуясь его свойствами.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & -7 & 15 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что можно вынести за знак определителя общий множитель 2 из 1-го столбца и еще множитель 2 из 1-й строки, а из 2-го столбца выносятся

$$\text{множитель 3: } \Delta = 2 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -7 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

В последней матрице 1-й и 2-й столбцы совпадают и определитель равен нулю (свойство 4).

ГЛАВА 4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И СПОСОБЫ ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

105 Теперь, когда мы познакомились с определителем квадратной матрицы, мы можем ввести еще одно важное понятие - понятие обратной матрицы.

Пусть A - квадратная матрица порядка n . Матрица B называется обратной для матрицы A , если выполняется условие $AB=BA=E$.

Обратную матрицу для матрицы A обозначают A^{-1} (аналогично числу, обратным к числу $a \neq 0$, называют число a^{-1} такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$).

Возникают два вопроса: любая ли квадратная матрица имеет обратную и как найти матрицу, обратную к A , если эта обратная матрица A^{-1} существует.

На первый вопрос отвечает следующее утверждение.

Матрица A имеет обратную A^{-1} тогда и только тогда, когда A - невырожденная, т.е. когда определитель $\det A \neq 0$.

Действительно, т.к. $AA^{-1} = E, \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$, и если существует матрица A^{-1} , то $\det A \neq 0$ и $\det A^{-1} \neq 0$. С другой стороны, если $\det A \neq 0$, можно определить правило для построения матрицы A^{-1} .

Покажем, в чем состоит правило построения обратной матрицы, на примере матрицы 2-го порядка.

$$\text{Пусть матрица } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Вычислим для каждого элемента матрицы a_{ij} его алгебраическое дополнение A_{ij} : $A_{11} = 2, A_{12} = 1, A_{21} = -2, A_{22} = 1$.

$$\text{Составим матрицу из алгебраических дополнений } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь транспонируем полученную матрицу, поменяв ролями ее строки и

$$\text{столбцы } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поделим теперь каждый элемент последней матрицы на определитель матрицы A , т.е. на $\det A = 4$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Эта последняя матрица и есть обратная для А. Ее еще можно записать, вынеся за знак матрицы $\frac{1}{4}$: $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Убедимся, что построенная матрица - искомая, для чего умножим A^{-1} на исходную матрицу А:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Конечно, как правило, такой способ не применяют для вычисления обратной матрицы более высокого порядка, чем 2 или 3. Способ этот слишком громоздкий, требует много операций при вычислении определителей, даже на современных компьютерах потребуется много машинного времени и накопятся большие ошибки в вычислениях.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то вычислять матрицу A^{-1} можно последовательно находя каждый ее столбец. Если обозначим первый столбец матрицы A^{-1}

вектором $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, а первый столбец единичной матрицы Е обозначить

$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, то первый столбец матрицы A^{-1} можно получить, решая систему

$$\text{уравнений } A\bar{x} = \bar{b}, A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем ищется второй столбец матрицы A^{-1} , снова решается система уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$, но вектор $\bar{x}$ - неизвестный второй столбец обратной матрицы, а в правой части стоит второй столбец матрицы E, который имеет вид

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так последовательно на компьютере по стандартным программам, реализующим метод Гаусса, решаются n линейных систем уравнений с одной и той же матрицей A , но разными правыми частями $\bar{b}$.

Мы дадим способ, как вычислить обратную матрицу вручную. Будем применять метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду.

Несколько расширим набор элементарных преобразований, разрешим еще одну операцию над строками, а именно, разрешим умножать (делить) строку матрицы на действительное число. Напомним, что к элементарным преобразованиям над строками относились следующие два преобразования: прибавление одной строки матрицы, умноженной на число, к другой строке и перестановка двух строк. Идея метода состоит в следующем:

Напишем исходную невырожденную матрицу A .

Припишем к ней за вертикальной чертой единичную матрицу E того же порядка $(A|E)$.

Будем приводить матрицу A сначала к ступенчатому виду, причем преобразования будем совершать с «длинной» строкой, т.е. по тем же правилам будем преобразовывать соответствующие строки матрицы E . Прделав конечное число шагов Гаусса, приведем A к ступенчатому виду P . Матрица P в нашем случае будет треугольной с угловыми элементами, отличными от нуля, так как исходная матрица A - невырожденная.

Получим промежуточный результат $(P|B)$, где B —матрица, которая получится из E после преобразований. Продолжая наши преобразования над P , добьемся того, чтобы матрица P «перешла» в E , тогда те же преобразования, которые переведут P в единичную матрицу E , переведут матрицу B в матрицу

обратную к A , т.е. в матрицу A^{-1}

$$(A|E) \rightarrow \dots \rightarrow (P|B) \rightarrow \dots \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Пример.

$$(A|E) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$(P|B) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 2/7 & 1/7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 5/14 & -1/14 & 3/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 2/7 & 1/7 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/14 & 5/14 & -1/14 \\ 0 & 1 & 0 & 5/14 & -1/14 & 3/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3/7 & 2/7 & 1/7 \end{array} \right) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

$$\text{Итак, } A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что $AA^{-1} = E$.

Рассмотрим неоднородную систему уравнений с числом переменных, равным числу уравнений, причем с невырожденной матрицей. Такая система, как уже говорилось, имеет единственное решение. Запишем систему в векторно-матричной форме $A\bar{x} = \bar{b}$, $\det A \neq 0$.

Тогда для матрицы A существует обратная A^{-1} . Предположим, что мы нашли эту обратную матрицу A^{-1} . Умножим нашу систему слева на A^{-1} :

$$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}; E\bar{x} = A^{-1}\bar{b}, \bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Последнее векторное равенство показывает, что неизвестный вектор $\bar{x}$ можно вычислить, умножив обратную матрицу A^{-1} слева на вектор правых частей.

Проверим на примере системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Будем находить решение системы и строить обратную матрицу методом Гаусса, причем обе задачи будем решать одновременно.

Запишем расширенную матрицу $\bar{A}$ (с приписанным столбцом правых частей) и отделив ее вертикальной чертой, рядом еще припишем единичную матрицу:

$$(A | \bar{b} | E) = (\bar{A} | E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Применяем элементарные преобразования 1-го и 2-го типа, заботясь о том, чтобы привести систему уравнений к ступенчатому виду и найти ее решение. На правую часть «широкой» матрицы, где стоит матрица E , не обращаем внимания, продольваем с ней те же преобразования, что и с левой частью:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Матрица системы приведена к ступенчатому виду; $r(A) = r(\bar{A}) = 3$. Из ступенчатой системы находим единственное решение: из последнего уравнения $x_3 = -1$, затем $x_2 = -x_3 = 1$ и $x_1 = x_2 - 1 = 0$ и вектор-решение -

$\bar{x} = (0, 1, -1)$. Попутно можно вычислить определитель исходной матрицы, равный произведению диагональных элементов, взятому с противоположным знаком (один раз меняли строки местами), $\det A = 1$. Продолжим наши преобразования, исключим из них столбец свободных членов. Разрешаем теперь умножение матричной строки на число, отличное от нуля. Теперь нашей задачей будет "превратить" матрицу, стоящую слева, в единичную матрицу E .

Эта же серия элементарных преобразований превращает правую матрицу в A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right) =$$

$$=(E \mid A^{-1}).$$

Для проверки умножим A^{-1} на $\bar{b}$ справа, полученный вектор-столбец совпадает с вектором-решением системы

$$A^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{x}.$$

Примеры решения задач

Действия над матрицами (линейные операции над матрицами, транспонирование матрицы, умножение матриц).

Данной теме посвящен §2 главы 1, где изложен теоретический материал и разобраны примеры.

Пример 1. Найти сумму двух матриц А и В, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Операция сложения двух матриц определена, только если обе матрицы-слагаемые имеют одинаковый порядок. В данном случае матрицы А и В одинакового порядка. Порядок матрицы - это пара чисел, первое из которых m равно числу строк матрицы, а второе n - числу ее столбцов. Матрицы А и В имеют порядок 2x4 (m=2, n=4).

Матрицы А и В можно сложить. Суммой А+В будет матрица того же порядка, что слагаемые, обозначим ее С.

Элементы c_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2, 3, 4$) получаются как суммы элементов матрицы А

и В с одинаковыми индексами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i=1, 2; j=1, 2, 3, 4$.

Итак, имеем
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Даны матрицы А и В. Найти матрицу $C=2A+B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что наши матрицы - квадратные (число строк равно числу столбцов, это общее число 3 и есть порядок наших матриц). Матрицы А и В - треугольные, у матрицы А под главной диагональю все элементы нулевые. Это свойство матриц исчезнет при их сложении. Чтобы получить матрицу 2А, следует все элементы А умножить на 2:

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, 2A + B = C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу $A - \lambda E$, где λ – число, а A – заданная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица E должна иметь порядок 4, ее элементы умножаются на λ и вычитаются из элементов A :

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 & 1 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 & 2 \\ 2 & -1 & (-\lambda) & 1 \\ 3 & 3 & 3 & (3-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Для заданной матрицы A найти транспонированную к ней A^T .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что операция транспонирования матрицы A сводится к тому, что строки A и ее столбцы меняются ролями, т.е. первая строка A запишется в первый столбец A^T , а вторая строка A – во второй столбец A^T . Если A имеет порядок

$$2 \times 3, \text{ то } A^T \text{ будет иметь порядок } 3 \times 2. \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Построить матрицу A^T для матрицы A . $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

Заметим, что матрица A обладает следующим свойством: во-первых, она квадратная, во-вторых, ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой. Такая матрица называется симметричной. Операция транспонирования для квадратной матрицы сводится к отражению ее элементов относительно главной диагонали, а значит, в нашем случае

$$A^T = A; A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти произведение матриц $A \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для умножения двух матриц их порядки должны быть «согласованы», а именно, число столбцов в первом множителе (матрица A) равно числу строк второго множителя B . В нашем случае обе матрицы квадратные и имеют одинаковый порядок 2. Значит, умножение $A \cdot B$ определено.

Произведение $C = AB$ будет квадратной матрицей того же порядка. Обозначим

ее элементы $c_{ij}, i = 1, 2; j = 1, 2. C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$

Чтобы получить c_{11} следует в матрице A выделить первую строку, а в матрице B выделить первый столбец и вычислить их скалярное произведение, $c_{11} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$. Теперь вычислим c_{12} , для этого выделим в A снова первую строку, а в B —второй столбец, перемножим их соответствующие элементы и сложим.

$$A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c_{12} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 4$$

Далее, $c_{21} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0$, $A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, элемент c_{22}

получается при умножении второй строки A и второго столбца B :

$$c_{22} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 5.$$

Запишем теперь матрицу $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Пример 7. Пусть A и B - матрицы из примера 6. Вычислить произведение $BA = D$, проверить, будут ли матрицы A и B перестановочны.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем формулы для вычисления элементов $d_{ij}, i = 1, 2; j = 1, 2$ матрицы

$$D: d_{11} = a_{11}b_{11} + b_{12}a_{21}, d_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22},$$

$$d_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}, d_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}.$$

Подставим в эти формулы числовые значения

$d_{11} = 4, d_{12} = -2, d_{21} = -2, d_{22} = 1$, и матрица $D=BA$ имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $AB \neq BA$, т.е. от перестановки сомножителей произведение изменилось, т.е. матрицы A и B не перестановочны.

Пример 8. Найти произведение C матрицы A на вектор - столбец $\bar{b}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Умножение возможно, т.к. вектор $\bar{b}$ можно рассматривать как матрицу, имеющую 3 строки и 1 столбец, а матрица A имеет 3 столбца, и число ее столбцов равно числу строк вектора $\bar{b}$. Произведение $C = A\bar{b}$ будет иметь порядок 4×1 , т.е. будет вектором-столбцом с элементами $c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}$.

$$c_{11} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 0 = 2; c_{21} = 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0,$$

$$c_{31} = 4 + 2 = 6, c_{41} = -4 + 4 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если умножение возможно, то произведение матрицы на вектор будет вектором.

Пример 9. Найти A^n , если $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, λ - число; $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Пусть сначала $n=2$ $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При $n=3$ имеем $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вообще, применив метод полной математической индукции, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примеры на приведение матрицы к ступенчатому виду.
Вычисление ранга матрицы и ранга системы векторов

Теория изложена в гл. 1 §3,4 тематического обзора, понятие линейной независимости системы векторов дано в юните 1.

Пример 1. Привести матрицу A к ступенчатому виду и определить ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Напомним, что ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк. Для вычисления ранга матрицы следует привести матрицу к ступенчатому виду. Для этого применяется процедура Гаусса, использующая элементарные преобразования над строками матрицы.

Шаг 1: переставим строки матрицы так, чтобы в левом верхнем углу оказалась 1, если это возможно. Поменяем местами 1-ую и 2-ую строки матрицы.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2: теперь с помощью 1 в левом верхнем углу матрицы получим нули в

первом столбце; оставив без изменения 1-ую строку, умножим ее (1-ую строку) на 2 и, прибавим ко второй строчке; результат напишем на месте 2-й строки; первую же строку прибавим к третьей, результат напишем на месте 3-ей строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3: посмотрим на матрицу, исключив из нее мысленно 1-ую строку и 1-ый столбец. В этой уменьшенной матрице в верхнем левом углу стоит элемент 5, отличный от нуля. Оставим без изменения 1-ую и 2-ую строку, а из элементов третьей вычтем элементы 2-ой строки, написав результат на месте 3-ей строки.

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & -2 \\ 0 & \textcircled{5} & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Получим ступенчатую матрицу P, ее угловые элементы отмечены (они обязательно ненулевые!). Число угловых элементов равно 2, это и значит, что в исходной матрице две строки линейно независимы, а третья является их линейной комбинацией. Ранг A равен 2, $r(A)=2$.

Пример 2. Пусть $\vec{a}(2,5,-1,3), \vec{b}(-1,4,1,2), \vec{c}(-7,2,5,0)$. Найти линейную комбинацию $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. Будут ли $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы?

Чтобы найти координаты вектора $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, следует координаты $\vec{a}$ умножить на 2, координаты $\vec{b}$ умножить на (-3) и сложить три вектора по координатам:

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} &= (2 \cdot 2 + 3 - 7; 2 \cdot 5 - 12 + 2; -2 - 3 + 5; 3 \cdot 2 - 6 + 0 = \\ &= (0, 0, 0, 0); 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \end{aligned}$$

Но тогда $\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$, и тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависима.

Ранг системы векторов равен 2, только 2 вектора из тройки линейно независимы. Вопрос о линейной зависимости $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можно решить еще так: составим матрицу из координат векторов, строчками матрицы будут координаты $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; приведем матрицу к ступенчатому виду и посмотрим, какой ее ранг.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ -7 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & 7 \\ 0 & -26 & -2 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В ступенчатой матрице две ступеньки, два угловых элемента, ранг матрицы из координат векторов равен 2, значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

Пример 3. Найти ступенчатую форму матрицы A и определить ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Способ приведения матрицы к ступенчатому виду не однозначен и сама ступенчатая форма может быть различна, но число угловых элементов, равное рангу матрицы, остается неизменным. Приведем здесь один из вариантов преобразования матрицы A к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ступенчатая матрица имеет 2 угловых элемента, $r(A) = 2$.

Пример 4. Показать, что система векторов 4-мерного пространства $\vec{e}_1(1, -1, 1, -1), \vec{e}_2(1, 1, 1, 1), \vec{e}_3(0, 0, 0, 1), \vec{e}_4(1, 0, 0, 0)$ образует базис в R^4 .

Вычислим ранг этой системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т.к. ступенчатая матрица имеет 4 ступеньки, то $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ линейно независимы и образуют базис в пространстве R^4 . (см. юниту 1).

Примеры решения системы линейных уравнений.

Рассмотрим примеры к главе 2 тематического обзора.

Пример 1. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 8x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Составим матрицу системы и прямым ходом метода Гаусса и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Выпишем соответствующую ступенчатую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_3 + 9x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Переменные x_1, x_2, x_3, x_4 , коэффициенты при которых являются угловыми элементами (отмечены), объявим несвободными переменными, а переменную

x_5 , «не связанную» с угловыми элементами, объявляем свободной. Перенесем ее в правую часть; впоследствии будем давать переменной x_5 произвольные числовые значения. Обратный ход метода Гаусса состоит в выражении переменных x_1, x_2, x_3, x_4 через переменную x_5 .

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{x_5}{2}$.

Подставим это выражение в предыдущее уравнение и выразим x_3 через переменную x_5 : $x_3 = 9x_4 - 2x_5 = \frac{-13}{2}x_5$.

«Поднимаемся вверх» по системе уравнений и из второго уравнения определим $x_2 = -x_3 + x_4 - x_5 = 5x_5$.

Затем, из первого уравнения находим $x_1 = -3x_2 - 4x_3 - x_5 = 10x_5$.

Выпишем окончательно
$$\begin{cases} x_1 = 10x_5 \\ x_2 = 5x_5 \\ x_3 = -13/2x_5 \\ x_4 = -1/2x_5 \end{cases}$$

Эти последние выражения представляют запись **общего** решения нашей однородной системы. Если теперь давать переменной x_5 числовые значения, можно получить все решения системы.

Заметим, что если $x_5 = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, и решением будет вектор $\vec{0}$; его называют тривиальным решением; этот вектор всегда есть среди решений однородной системы.

Пример 2. Найти общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ступенчатая матрица имеет треугольный вид, на главной диагонали стоят отличные от нуля угловые элементы. Это значит, что ранг матрицы системы равен числу переменных. Все переменные x_1, x_2, x_3, x_4 - несвободные.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_4 = 0$, тогда $-3x_3 = -4x_4$, $x_3 = 0$.

Затем из второго и первого уравнения определим $x_1 = x_2 = 0$.

Таким образом, если **ранг системы равен числу переменных**, то система имеет **единственное решение** (нет свободных переменных!), и этим единственным решением однородной системы будет $\vec{0}$ -вектор.

Пример 3. Исследовать неоднородную систему уравнений. В случае ее совместности найти ее общее или единственное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 10x_4 = 6 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Так как последняя строка в ступенчатом виде расширенной матрицы состоит из нулей, делаем вывод, что система совместна.

Выпишем соответствующую ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \\ -2x_2 - 4x_4 = -6 \end{cases}$$

С угловыми элементами (они отмечены) связаны переменные x_1, x_2 . Они будут несвободными, или зависимыми. Переменные x_3 и x_4 - свободные.

Выразим зависимые переменные x_1, x_2 через свободные x_3, x_4 .

Получим из последнего уравнения $x_2 = 3 - 2x_4$.

Подставим это выражение в первое уравнение и выразим переменную x_1 :

$$x_1 = -3x_2 + x_3 - 6x_4 = -3(3 - 2x_4) + x_3 - 6x_4 = x_3 - 9.$$

Если давать произвольные значения переменным x_3 и x_4 , получим все

решения неоднородной системы:
$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 9 \\ x_2 = -2x_4 + 3 \end{cases}$$

Последняя запись задает **общее решение** неоднородной системы. Если x_3 и x_4 принимают конкретные числовые значения, например, $x_3 = 0, x_4 = 1$, вычислив $x_1 = -9, x_2 = -2 + 3 = 1$, получим вектор $\bar{x}(-9, 1, 0, 1)$, который является **частным решением** системы; частных решений система имеет бесчисленное множество. Заметим, что если решать соответствующую однородную систему $A\bar{x} = \bar{0}$, то ее общее решение запишется так: x_3, x_4 -

свободные переменные, x_1, x_2 - зависимы и
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_4 \end{cases}$$

Запишем общее решение однородной системы в виде вектора

$\bar{x} = (x_3, -2x_4, x_3, x_4)$, где свободные переменные x_3, x_4 , а на первом и втором местах стоят выражения несвободных x_1, x_2 через свободные x_3, x_4 .

Заметим, что одно из частных решений неоднородной системы получается при $x_3 = x_4 = 0$.

Обозначим это частное решение неоднородной системы вектором $\bar{y} = (-9, 3, 0, 0)$.

Тогда общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной:

$$\bar{y} + \bar{x} = (x_3 - 9, -2x_4 + 3, x_3, x_4).$$

Пример 4. Исследовать систему уравнений и найти ее решения в случае совместности:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}, A\bar{x} = \bar{b}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -6 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -9 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Система совместна - последняя строка состоит из нулей. Угловые элементы-коэффициенты при x_2, x_2, x_3 . Ранг матрицы $\bar{A}$ - расширенной матрицы системы - равен 3, ранг матрицы A тоже равен 3. Свободных переменных нет. Система имеет единственное решение: $x_3 = 0, x_2 = -1, x_4 = 1$.

Пример 5. Исследовать систему $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & | & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & | & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & | & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Последнее уравнение ступенчатой системы имеет вид:

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 = 6$. Очевидно, это уравнение не может быть выполнено

ни при каких значениях переменных x_1, x_2, x_3, x_4 . Значит, наша система **несовместна**. Формальным признаком несовместной системы является наличие строки, в которой до вертикальной черты стоят нули, а последний элемент, стоящий за вертикальной строкой, ненулевой. Фактически это означает, что **ранги** основной и расширенной системы **не совпадают**.

Примеры решения задач на вычисление определителей разложением по строке (или столбцу) и методом Гаусса.

Основные понятия и свойства определителей изложены в главе 3. Там же разобраны примеры. Остановимся еще на некоторых примерах.

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка, используя разложение

по строке (столбцу): $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Чтобы вычислить определитель, можно использовать разложение по любому ряду-строке или столбцу. Например, вычисление определителя разложением по i -ой строке сводится к суммированию произведений элементов этой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Поэтому естественно вычислять определитель, раскладывая его по тому ряду, где есть нулевые элементы. Выберем в нашем определителе вторую строку.

Элемент $a_{21}=1$. Чтобы вычислить алгебраическое дополнение этого элемента, вычеркнем мысленно из матрицы вторую строку и первый столбец, на пересечении которых стоит a_{21} . Оставшемуся определителю второго порядка припишем знак $(-1)^{i+j}=(-1)^{2+1}$, где i, j - индексы элемента a_{21} :

$$A_{21}=(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(5 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = -9.$$

Следующий элемент во второй строке $a_{22}=2$, а алгебраическое дополнение $A_{22}=(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=(2 \cdot 1 - 2 \cdot 4) = -6$

Алгебраическое дополнение элемента $a_{23}=0$ можно не считать

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 1 \cdot (-9) + 2 \cdot (-6) = -21.$$

Пример 2. Вычислить определитель, используя его свойства:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что все элементы последнего столбца - четные, вынесем общий

множитель 2 за знак определителя, получим $\det A = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

В последнем определителе два одинаковых столбца (второй и четвертый), а определитель матрицы, имеющей одинаковые столбцы, равен нулю, $\det A=0$.

Пример 3. Вычислим определитель, пользуясь методом Гаусса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Элементарные преобразования матрицы, используемые методом Гаусса, не меняют абсолютной величины определителя, но при перестановке строк (элементарное преобразование 2-го типа) определитель меняет знак. Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Остается привести матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -18 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -35 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot (-35) = 175.$$

Заметим, что если все элементы на главной диагонали угловые (т.е. не равны нулю), то определитель не равен нулю. В этом случае ранг исходной квадратной матрицы равен ее порядку и все строки (столбцы) матрицы линейно независимы. Если же **определитель** матрицы **равен нулю**, это обстоятельство является признаком зависимости строк (столбцов) матрицы. Такая матрица называется **вырожденной**.

Пример 4. Вычислим в качестве примера еще один замечательный

определитель - определитель Вандермонда: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

Используем свойства определителя, не меняющие его величины, получим в 1-ом столбце нули, кроме верхнего левого элемента 1. Для этого предпоследнюю строку умножим на a и вычтем из последней, затем вторую строку умножим на a и вычтем из третьей и первую строку, умноженную на a , вычтем из второй. Первую строчку оставляем без изменения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$$

Разложим этот определитель по 1-му столбцу и вынесем за знак определителя общие множители в каждом из столбцов:

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

Последний определитель имеет ту же конструкцию, что и первоначальный, но порядок его на единицу меньше. Применим те же преобразования, что и в первый раз и получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

Определитель Вандермонда равен нулю в том и только том случае, когда среди чисел a, b, c, d есть одинаковые.

Примеры на нахождение обратной матрицы

Пример 1. Найти обратную матрицу для матрицы A , используя алгебраические

дополнения: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Вычислим определитель матрицы: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 = \Delta$.

Найдем для каждого элемента $a_{ij}, i=1,2; j=1,2$ его алгебраическое дополнение A_{ij} и составим из этих алгебраических дополнений матрицу:

$$A_{11}=1, A_{12}=0, A_{21}=1, A_{22}=3, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь транспонируем эту матрицу, записав на место 1-ой строки 1-ый столбец, а на место второй строки 2-ой столбец. Затем поделим каждый элемент транспонированной матрицы на величину определителя Δ , получим обратную

$$\text{матрицу } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислить матрицу, обратную матрице A: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Применим тот же алгоритм к матрице 3-го порядка.

$$\Delta = \det A = 1; A_{11} = 0; A_{12} = 1; A_{13} = -1;$$

$$A_{21} = -1; A_{22} = -1; A_{23} = 2; A_{31} = 1; A_{32} = 1; A_{33} = -1$$

Матрица A^{-1} получится так: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Чтобы убедиться в правильности вычислений, найдем произведение AA^{-1} , должна получиться матрица E.

Пример 3. Убедиться, что система $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет единственное решение и найти это решение двумя способами: методом Гаусса и с помощью обратной

матрицы. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$

Заметим, что квадратная система имеет единственное решение, если ранг матрицы A равен числу переменных, $r(A)=3$. В этом случае ступенчатая форма матрицы имеет диагональный вид и на главной диагонали нет нулевых элементов.

Определитель такой матрицы $\det A \neq 0$, а значит, обратная матрица A^{-1} существует. Умножим систему $A\bar{x} = \bar{b}$ слева на A^{-1} , получим

$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$, $E\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$, $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$, т.е. вектор - решение системы по-

лучается умножением обратной матрицы A^{-1} на столбец свободных членов $\bar{b}$. Будем находить решение системы и строить обратную матрицу методом Гаусса, причем обе задачи будем решать одновременно. Запишем расширенную матрицу нашей системы и, отделив ее вертикальной чертой, припишем единичную матрицу E :

$$(A \mid \bar{b} \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Будем сначала применять элементарные преобразования 1-го и 2-го типа, заботясь о том, чтобы привести систему к ступенчатому виду и найти ее решение. На правую часть «широкой» матрицы не обращаем внимания, просто проделываем над ее строками те же преобразования, что и с левой расширенной матрицей:

$$(A \mid \bar{b} \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Левая часть матрицы приведена к ступенчатому виду, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$.

$$\text{Находим единственное решение системы} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 = 3 \\ 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3$. Попутно можем вычислить определитель системы, равный произведению диагональных элементов (строки не переставляли): $\det A = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$.

Продолжим наши преобразования, оставив только самую левую и правую матрицы (исключим столбец свободных членов - он уже сыграл свою роль).

Разрешим теперь еще одно элементарное преобразование над строками матриц: строка матрицы умножается на число, отличное от нуля. Теперь элементарные преобразования всех трех типов позволят нам треугольную матрицу, стоящую слева, превратить в единичную матрицу E . Эта же серия

элементарных преобразований превращает правую матрицу в A^{-1} . Итак, продолжим вычисления:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right).$$

Мы поделили вторую и третью строки на число 3, чтобы получить слева на диагонали единицы. Вычтем теперь из первой строки последнюю, а затем из первой же строки вычтем вторую:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right),$$

Последняя матрица имеет вид $(E \mid A^{-1})$

Итак, обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь матрицу A^{-1} на начальный вектор $\bar{b}$:

$$A^{-1}\bar{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{x}$$

где $\bar{x}$ уже найденный вектор-решение.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	Линейные операции над матрицами. Вычисление матрицы $C = \alpha A + \beta B$, где α, β – числа, A, B – заданные матрицы	1. Определить, имеют ли матрицы A и B одинаковый порядок. Если «да», то перейти к п.2, β противном случае вычислить C нельзя. 2. Умножить все элементы матрицы A на число α $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m,n}$ 3. Умножить все элементы матрицы B на число β $\beta B = (\beta b_{ij})_{m,n}$ 4. Вычислить элементы матрицы C по формулам: $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$
2	Умножение матриц. Вычисление произведения матрицы A на B . $C = A \cdot B$	1. Проверить, совпадает ли число столбцов матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$ с числом строк матрицы $B = (b_{ij})_{nk}$, («согласованы» ли порядки множителей). Только в этом случае можно умножить A на B. В противном случае вычислить C нельзя. 2. Определить порядок матрицы произведения: $C = (c_{ij})_{mk}$ имеет порядок $m \times k$, где m – число строк первого множителя A, k – число столбцов второго множителя B. 3. Вычислить каждый элемент матрицы произведения C по формулам: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$. 4. Выписать полученную матрицу C.
3	Приведение матрицы к ступенчатому виду. Вычисление ранга матрицы.	1. Переставить строки матрицы так, чтобы в верхнем левом углу (первый элемент первой строки) оказался отличный от нуля «ведущий» элемент (для ручного счета желательно, чтобы этот элемент был равен единице, если возможно).

№ п/п	Умение	Алгоритмы
3		2. Переписать первую строку без изменения. Применяя элементарные преобразования, образуем нули в столбце под выбранным «ведущим» элементом. Получаем первую ступеньку. 3. Оставляем без изменения 1-ую строку и 1-ый столбец полученной матрицы. Операции, описанные в пп. 1 и 2 применяются к «укороченной» матрице (без 1-ого столбца и 1-ой строки) и повторяются до тех пор, когда исходная матрица будет иметь ступенчатый вид. 4. Вычислить ранг матрицы. Ранг матрицы $r(A)$ равен числу угловых элементов в ступенчатой форме матрицы.
4	Вычисление обратной матрицы A^{-1} методом Гаусса.	1. Приписать к квадратной невырожденной матрице A справа за вертикальной чертой единичную матрицу того же порядка. Получим матрицу $(A E)$. 2. Приведем матрицу $(A E)$ к ступенчатому виду элементарными преобразованиями 1-ого и 2-ого типов. 3. Полученную ступенчатую матрицу привести к виду, где слева будет единичная матрица. Применить элементарные преобразования 1-ого, 2-ого и 3-го типа. Преобразования начинать с последней строки. Преобразованная матрица будет иметь вид: $(E B)$. 4. Выписать обратную матрицу. Обратная матрица A^{-1} равна матрице B, стоящей справа от E в последней преобразованной матрице.
5	Вычисление определителя матрицы $\det A$ методом Гаусса.	1. Привести исходную матрицу к ступенчатому виду. 2. Подсчитать число K, равное числу перестановок строк при приведении матрицы к ступенчатому виду. 3. Вычислить определитель ступенчатой (верхнетреугольной) матрицы как произведение элементов главной диагонали, умноженное на множитель $(-1)^K$.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
6	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. а) Найти общее решение однородной системы $A\bar{x} = \bar{0}$ б) Исследовать на совместность неоднородную систему уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$ и найти ее общее или единственное решение методом Гаусса.	1. Выписать матрицу коэффициентов при неизвестных и привести ее к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса). 2. Выписать ступенчатую систему и определить ранг матрицы. 3. Сравнить ранг матрицы с числом переменных n и определить, сколько решений имеет система. Если $\text{rang}(A) < n$, то система имеет множество решений (общее решение), если же $\text{rang}(A) = n$, то решение единственное. 4. Определить зависимые и свободные переменные. Переменные, соответствующие угловым элементам объявить зависимыми, остальные $n - r$ переменных – свободными. 5. Выразить зависимые переменные (обратный ход метода Гаусса) через свободные. 6. Найти общее решение системы. Общее решение определяется формулами, полученными в предыдущем пункте. Давая свободным переменным произвольные значения и вычисляя несвободные, получим все решения системы. В случае, когда $\text{rang}(A) = n$, система имеет единственное тривиальное решение: $\bar{x} = \bar{0} : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 1. Записать «расширенную» матрицу системы A, приписав к матрице системы A вектор свободных членов $\bar{b}$: $\bar{A} = (A \mid \bar{b})$ 2. Привести матрицу $\bar{A}$ к ступенчатому виду и определить $\text{rang}(A)$ и $\text{rang}(\bar{A})$. 3. Исследовать систему на совместность. Если $\text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$, то система несовместна, т.е. не имеет решения.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
6	b)	Если $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = n$, где n – число переменных, то перейти к выполнению п.7. В случае, когда $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) < n$, перейти к п.4. 4. Определить зависимые и свободные переменные. Объявить переменные x_i, соответствующие угловым элементам, зависимыми, остальные $(n-r)$ переменных – свободными. 5. Выразить обратным методом Гаусса зависимые переменные через свободные. 6. Найти общее решение системы. Полученные в п.5 выражения зависимых переменных через свободные переменные и правые части уравнений и определяют общее решение неоднородной системы. 7. Единственное решение системы 1 получим обратным ходом метода Гаусса.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 1.

Задание

Вычислить матрицу $C = 5A - B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Определить, имеют ли матрицы А и В одинаковый порядок. Если «да», перейти к п.2, в противном случае вычислить $C=5A-B$ нельзя	Обе матрицы имеют порядок 2×3 (на первом месте число строк, на втором – число столбцов). Матрицы одного порядка, переходим к п.2.
2	Умножить все элементы А на число 5	$5A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$
3	Умножить все элементы В на (-1)	$-B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$
4	Вычислить элементы матрицы С: $c_{ij} = 5a_{ij} - b_{ij}$ $i=1,2; j=1,2,3.$	$C = \begin{pmatrix} -5+5 & -5+2 & 10+0 \\ 0+2 & 20-1 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 10 \\ 2 & 19 & 0 \end{pmatrix}$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задача 1.

Даны матрицы А и В. Найти $C=2A+3B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Даны матрицы A и B. Найти $C=3A-2B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

Даны матрицы A и B. Найти $C=5(A+B)$, если это возможно.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 4.

Найти матрицу $C=A+\lambda E$, где λ - некоторое число, E - единичная матрица, A - заданная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить $A-\lambda E=C$ при $\lambda = 3$.

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2

Задание

Даны матрицы A и B . Найти матрицу $C=A \cdot B$, если возможно.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Проверим, совпадает ли число столбцов матрицы A с числом строк B («согласованы» ли их порядки). В противном случае умножение A на B невозможно.	Матрица A имеет порядок 2×3 , число ее столбцов равно 3, матрица B имеет порядок 3×3 , число столбцов у нее 3; порядки «согласованы», существует произведение A на B $C = A \cdot B$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
2	Определить порядок матрицы произведения: С имеет порядок $m \times k$, где m – число строк А, n – число столбцов В.	Порядок матрицы С будет 2×3 , т.к. матрица А имеет 2 строки, а матрица В имеет 3 столбца $C = (c_{ij})_{23}$
3	Вычислить каждый элемент матрицы С по формулам: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$	Вычисляем элементы первой строки С: $i=1, j=1,2,3$. $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} =$ $= (1 \cdot 1) + 2(-1) + (-1) \cdot 1 = -2$ $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} =$ $= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -8$ $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} =$ $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$ Вычисляем элементы второй строки: $i=2, j=1,2,3$. $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} =$ $= 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 2$ $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} =$ $= 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 = 3$ $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} =$ $= 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$
4	Выпишем полученную матрицу-произведение	$C = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задача 1.

Найти произведения матриц АВ и ВА, если они существуют. Сравните матрицы-произведения:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2.

Вычислить произведения AB и BA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Совпадают ли матрицы произведения AB и BA ?

Задача 3.

Вычислить матрицу E^3 , где E - единичная матрица третьего порядка.

Задача 4.

Вычислить A^3 , где матрица задана:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Указание: найти сначала произведение $A \cdot A = A^2$, затем умножить A^2 на A , $A^3 = A^2 \cdot A$.

Задача 5.

Найти произведение AB и сравнить с матрицей BA .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 5 & 7 & -11 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 3.**Задание**

Привести матрицу A к ступенчатому виду и определить ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Переставить строки матрицы так, чтобы в верхнем левом углу оказался ненулевой «ведущий» элемент.	В первой строке первый элемент не равен нулю. Строки можно не переставлять. Но для ручного счета удобно, чтобы «ведущий» элемент был равен единице. Поменяем местами первую и вторую строки матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ведущий элемент 1 в первой строке <u>подчеркнут</u>
2	Переписать первую строку без изменения. Применяя элементарные преобразования, образуем нули в столбце под ведущим элементом	Из элементов второй строки вычитаем соответствующие элементы первой, умноженные на 2; из элементов третьей строки вычитаем элементы первой, умноженные на 4; из элементов последней строки вычитаем соответствующие элементы первой. Первая строка остается без изменения $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	Оставляем без изменения первую строку и первый столбец полученной матрицы. Операции пункта 1 и 2 алгоритма применяем к «укороченной матрице» (без первого столбца и первой строки)	«Ведущим» элементом берем (-1), стоящую во второй строке и втором столбце. Перепишем без изменения 1-ый столбец и 1-ую и 2-ую строки матрицы. Из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй, умноженные на 3, из элементов последней строки вычитаем элементы второй, умноженные на 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
3		Получим вторую ступеньку. Следующим «ведущим» элементом берем (-2) в третьей строке (подчеркнут). Оставляем без изменения первые три строки, а из последней строки вычитаем соответствующие элементы третьей. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Сделано три шага методом Гаусса. Последняя матрица имеет ступенчатый вид. Угловые элементы подчеркнуты.
4	Вычислим ранг матрицы	Число угловых элементов в ступенчатой матрице равно трем. Поэтому исходная матрица имеет ранг 3. rang A=3

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задача 1.

Определите ранг матрицы, преобразовав ее в ступенчатую методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -8 & -13 & -14 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 8 & 12 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 2.

Определите ранг матрицы, преобразовав ее в ступенчатую методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1, R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 : 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rang = 3.

Задача 3.

Определите ранг матрицы, преобразовав ее в ступенчатую методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Задача 4.

Определите ранг матрицы, преобразовав ее в ступенчатую методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 5.

Определите ранг матрицы, преобразовав ее в ступенчатую методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 4.**Задание**

Методом Гаусса найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Приписать к матрице А справа единичную матрицу того же порядка. (A E)	$(A E) = \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$
2	Привести матрицу (A E) элементарными преобразованиями первого и второго типов к ступенчатому виду	$\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -14 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$ поменяем местами вторую и третью строки

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
2		$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right)$ Последняя матрица имеет ступенчатый вид
3	Полученную ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями 1-ого, 2-ого и 3-его типов приводим к виду, где слева будет матрица Е. Преобразования начинаем с последней строки.	Поделим последнюю строку на 2: $\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow$ $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array} \right)$ К элементам второй строки прибавим элементы третьей, умноженные на 4, а к элементам первой строки прибавим элементы третьей, умноженные на (-5) $\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 0 & -3/2 & -5/2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \text{все}$ элементы 2-ой строки умножим на (-1) $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 2 & 0 & -3/2 & -5/2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow$ из элементов первой строки вычитаем элементы второй, умноженные на 2 $\left(\begin{array}{ccc ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array} \right)$
4	Выписать обратную матрицу. Она равна матрице, стоящей справа в последней	В последней матрице слева стоит единичная матрица Е.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
4	преобразованной матрице.	Тогда матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0.5 & 0.5 & -2 \end{pmatrix}$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задача 1.

Найти матрицу, обратную матрице А

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 2.

Найти матрицы, обратные к матрицам А и В.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 5 & 7 & -11 \\ 6 & 8 & -13 \end{pmatrix}.$$

Убедиться, что данные матрицы взаимно обратны.

Указание: можно умножить матрицу А на В, должна получиться единичная матрица Е.

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 5.

Задание

Вычислить определитель матрицы $\det A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ методом Гаусса}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Приводим исходную матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
2	Подсчитываем число K , равное числу перестановок строк при приведении к ступенчатому виду	$K=1$, строки переставляли один раз
3	Вычисляем определитель ступенчатой матрицы как произведение элементов главной диагонали, умноженное на множитель $(-1)^K$	Угловые элементы ступенчатой матрицы совпадают с элементами главной диагонали. $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-1)^1 = -6$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задача 1.

Вычислить определители заданных матриц.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 6(а).

Задание

Методом Гаусса найти общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Выписать матрицу коэффициентов при неизвестных и приведем ее к ступенчатому виду	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1		$\rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	Выписать ступенчатую систему; определить ранг матрицы	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ Ранг матрицы равен 2, т.к. имеем два угловых элемента (подчеркнуты)
3	Сравнить ранг матрицы с числом переменных n и определить, сколько решений имеет система.	$r(A)=2 < n=4$; система имеет множество решений; переходим к отысканию общего решения системы.
4	Определить зависимые и свободные переменные, переменные, соответствующие угловым элементам объявляем зависимыми, а остальные – свободными.	Т.к. угловые элементы в ступенчатой матрице являются коэффициентами при переменных x_1, x_3 – зависимые, x_2, x_4 – свободные переменные.
5.	Выразить зависимые переменные через свободные	Из последнего уравнения получаем, что $x_3=2x_4$, затем подставляя x_3 в первое уравнение, получаем выражение для x_1. $x_1 = x_2 - x_3 + x_4 = x_2 - (2x_4) + x_4$ Итак $\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 (*) \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$
6	Найти общее решение системы, используя формулы (*), выражающие зависимые переменные через свободные	Формулы (*) задают общее решение системы. Давая переменным x_2, x_4 произвольные значения и вычисляя x_1 и x_3 , получим все решения системы

Пример выполнения упражнения тренинга на умение 6(а).

Задание

Исследовать неоднородную систему уравнений на совместность и найти

общее или единственное решение в случае совместимости:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данного задания предложенному алгоритму
1	Записать расширенную матрицу системы, приписав к матрице коэффициентов вектор свободных членов: $\bar{A} = (A \bar{b})$	$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right)$
2	Привести матрицу $\bar{A}$ к ступенчатому виду и определим ранг основной матрицы $\text{rang}(A)$ и ранг расширенной $\text{rang}(\bar{A})$	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$ $\rightarrow \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) ; \text{rang}(A) = 2$ $\text{rang}(\bar{A}) = 2$
3	Исследовать систему на совместность. Если $\text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$, система несовместна, если же $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, система совместна, имеет единственное или бесчисленное множество решений.	$\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$, система имеет решение; т.к. $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2 < n = 4$, где n – число переменных, то решение системы не единственное, переходим к нахождению общего решения (п.4).

4	Определить зависимые и свободные переменные	Угловые элементы соответствуют переменным x_1, x_2 . x_1, x_2 – зависимые переменные, x_3, x_4 – свободные
5	Выразим зависимые переменные через свободные обратным ходом метода Гаусса	Выражаем переменные x_1, x_2 через x_3, x_4 : $x_2 = 3 + x_3 - 2x_4$ $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 - x_4$ $x_1 = 2 - 3(3 + x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4$ $x_1 = -7 - 4x_3 + 5x_4$
6	Найти общее решение системы, используя выражения зависимых переменных через свободные и вектор свободных членов.	Окончательно, формулы, определяющие общее решение, имеют вид: $\begin{cases} x_1 = -7 - 4x_3 + 5x_4 \\ x_2 = 3 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$

Решите самостоятельно следующие задачи:

Задача 1.

Найдите общее или единственное решение следующих однородных систем:

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Исследовать и решить в случае совместности следующие неоднородные системы уравнений.

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

2. Задачи для самостоятельного решения.

Номер варианта каждого студента совпадает с его номером в списке группы.
Задание состоит из двух задач.

Задача 1. Дана матрица C и вектор $\bar{d}$.

Используя метод элементарных преобразований Гаусса, определить:

1) Ранг матрицы C .

2) Общее решение однородной системы уравнений $C\bar{x} = \bar{0}$, где

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{x} - \text{вектор неизвестных, } \bar{0} - \text{вектор правых частей}$$

однородной системы.

3) Совместна ли неоднородная система уравнений $C\bar{x} = \bar{d}$?

Если совместна, найти ее общее (или единственное) решение.

Задача 2. Даны матрица A и вектор $\bar{b}$. Считая вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ вектором

неизвестных, выписать систему уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$.

1) Вычислить определитель матрицы A , убедиться, что матрица A не вырождена, $\det A \neq 0$.

2) Найти матрицу A^{-1} .

3) Решить неоднородную систему $A\bar{x} = \bar{b}$, найти вектор-решение.

4) Найти произведение матрицы A^{-1} на вектор $\bar{b}$.

испр. е. е.

№ вари анта	Задача 1			Задача 2		
	$C\bar{x} = \bar{d}$			$A\bar{x} = \bar{b}$		
	C	$\bar{x}$	$\bar{d}$	A	$\bar{x}$	$\bar{b}$
1	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 11 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -15 & 18 \\ 3 & 5 & -4 & 6 \\ 7 & 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$45 - 2(5) + 3(65) - 1(86) = 45 - 10 + 195 - 86$
 148
 148
 148

№ вари анта	Задача 1			Задача 2		
	$C\bar{x} = \bar{d}$			$A\bar{x} = \bar{b}$		
	C	$\bar{x}$	$\bar{d}$	A	$\bar{x}$	$\bar{b}$
7	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 11 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 18 & -15 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 11 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

№ вари анта	Задача 1			Задача 2		
	$C\bar{x} = \bar{d}$			$A\bar{x} = \bar{b}$		
	C	$\bar{x}$	$\bar{d}$	A	$\bar{x}$	$\bar{b}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -11 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -11 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

№ вари анта	Задача 1			Задача 2		
	$C\bar{x} = \bar{d}$			$A\bar{x} = \bar{b}$		
	C	$\bar{x}$	$\bar{d}$	A	$\bar{x}$	$\bar{b}$
19	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 11 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -15 & 18 \\ 3 & 5 & -4 & 6 \\ 7 & 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 11 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

№ вари анта	Задача 1			Задача 2		
	$C\bar{x} = \bar{d}$			$A\bar{x} = \bar{b}$		
	C	$\bar{x}$	$\bar{d}$	A	$\bar{x}$	$\bar{b}$
25	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 18 & -15 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 11 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -15 & 18 \\ 3 & 5 & -4 & 6 \\ 7 & 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -11 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Математика. Углубленный курс
Юнита 2
Элементы линейной алгебры**

**Редактор Н.М. Пилипенко
Оператор компьютерной верстки И.Ю. Маслова**

**Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"
Тираж 6000**

**Сдано в печать 27.07.2001 г.
Заказ 2615**

Современный Гуманитарный Университет

Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, 2а.